Séquence 05 : **Suites numériques**

1 – Généralités

1.1 – Définition et modes de génération

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Une **suite numérique** u est une fonction définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \geqslant n_0$, on associe le nombre noté $u(n)$ ou encore u_n.
La suite est notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ou, plus simplement, (u_n).

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie arbitrairement sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_3 = 713$; $u_4 = -12$

NOTATION

Attention à ne pas confondre le nombre u_n et la suite (u_n).

Définition

Une suite est définie **explicitement** lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n. On donne alors l'expression du **terme général** u_n en fonction de n.

EXEMPLE

La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n+1$ est définie explicitement
$v_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$; $v_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$ et $v_{58} = 2 \times 58 + 1 = 117$.

NOTATION

Il existe une fonction f telle que $u_n = f(n)$.

Définition

Une suite est définie **par récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

NOTATION

Il existe une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

EXEMPLE

La suite w définie sur $\mathbb{N}$ par le premier terme $w_0 = 4$ et, pour tout entier n, $w_{n+1} = 2w_n + 1$ est définie par récurrence. Pour trouver $w_4 = 79$, il faut calculer w_3 qui nécessite de calculer w_2 qui nécessite à son tour le calcul de w_1 que l'on calcule grâce à : $w_1 = 2w_0 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$. Puis $w_2 = 2w_1 + 1$, etc.

NOTATION

On peut écrire
$$\begin{cases} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \end{cases}$$

1.2 – Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé **la raison** de la suite (u_n).

EXEMPLE

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = u_n + 2$. Par définition, (u_n) est la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.
En particulier, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_{10} = 2$.
Alors $u_{22} = u_{10} + (22-10)r = 2 + 12 \times 3 = 38$.
$u_0 = u_{10} + (0-10) \times r = 2 - 10 \times 3 = -28$

1.3 – Suites géométriques

Définition

Une suite (v_n) est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel non nul q tel que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$.
Le nombre réel q est appelé **la raison** de la suite (v_n).

EXEMPLE

(v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
Pour tout entier naturel n, la suite est définie par : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.
Ainsi, $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{4}$, $v_3 = \frac{1}{8}$, …

Propriété

Si (v_n) est une suite géométrique de raison non nulle q alors, pour tous entiers naturels n et p, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.
En particulier, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_{10} = 2$.
Alors $u_{22} = u_{10} + (22-10)r = 2 + 12 \times 3 = 38$.
$u_0 = u_{10} + (0-10) \times r = 2 - 10 \times 3 = -28$